TITLE:
混合問題における特異性の伝播について (超局所解析)

AUTHOR(S):
若林, 誠一郎

CITATION:
若林, 誠一郎. 混合問題における特異性の伝播について (超局所解析). 数理解析研究所講究録 1977, 295: 96-106

ISSUE DATE:
1977-05

URL:
http://hdl.handle.net/2433/106208

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
295巻 1977年 96-106

混合問題における特異性の伝播について

筑波大 数学系　　若林誠一郎

1. 序

定係数双曲型方程式(系)に対するCauchy問題の基本解の特異台の評価は、Atiyah-Bott-Gårding[1]によって与えられた。 1/4－空間における定係数双曲型混合問題に対しては、まずMatsumura[4]がそこで用いられたlocalization methodを混合問題に適用して、反射波に対応する特異台のinner estimateを与えた。 そして、Wakabayashi[8]において、ある種の制限の下で側面波に対応する特異台のinner estimateが与えられ、Tsuji[7], Wakabayashi[9]においてstrictly hyperbolic operatorの積に対する混合問題(境界が非特性)に対して境界波に対応する特異台も含めた形で、基本解の特異台のinner estimateが与えられた。 また、同じ仮定の下で基本解のouter estimateがWakabayashi[10]によって与えられた。 これらは単独の方程式に対する結果であるが、方程式系に対しても全く同様の議論を用いて対応する結果を得るこ

とができる(Garnir[3])。しかし数理物理学にあらわれる双曲型方程式(系)の混合問題を扱う上で、上に述べた仮定は強すぎる。例えば結晶光学の方程式，電磁流体の方程式等は、[9],[10]の議論では扱えない。ここでは、1/4－空間における$\mathcal{E}$-well posedな定係数双曲型混合問題に対して、その基本解の特異台の inner and outer estimates が[1]に対応する形で与えられることをしめす。

Cauchy問題においては、hyperbolic polynomial の性質を調べればよいが、混合問題においては、さらに hyperbolic function であるLopatinski行列式に対して類似の性質をしめすことによって望む結果が得られる。hyperbolic polynomial とちがって、Lopatinski行列式のlocalizationの主部と主部のlocalizationとが必ずしも一致しない。そのため、Cauchy問題と少し異った形で結果が与えられる。また、Lopatinski行列式の定義域(正確には、Lopatinski行列式のlocalizationの定義域)が一般に制限されているために側面波に対応する特異性があらわれる点で、Cauchy問題とは異なる。

なお、stationary phase method を用いたDuff[2]の研究があることに注意しておく。

2. 記号及び仮定　次の記号を用いる：

$\mathbb{R}^n$: n次元(実)Euclid空間，　$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$, $\tilde{\xi}=(\xi,\xi_{n+1})$, $\xi'=(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$,

$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $\vartheta=(1,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n$, $\tilde{\vartheta}=(\vartheta,0)\in\mathbb{R}^{n+1}$,

$\mathbb{R}^n_+=\{x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n;\ x_n>0\}$, $X=\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^1_+\times\mathbb{R}^1_-$,

$D=i^{-1}(\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_n)$.

$P(\xi)$を次数mの hyperbolic polynomial w.r.t. ϑ とする。 すなわち、

$$P^0(-i\vartheta)\neq 0,\quad P(\xi+s\vartheta)\neq 0 \quad \text{when } \xi\in\mathbb{R}^n \text{ and } \operatorname{Im} s<-\gamma_0.$$

ここで、P^0はPの主部を表わす。 すなわち、

$$P(t\xi)=t^m(P^0(\xi)+o(1)) \quad \text{as } t\to\infty,\quad P^0(\xi)\neq 0.$$

$\Gamma=\Gamma(P,\vartheta)\ (=\Gamma(P))(\subset\mathbb{R}^n)$によって$\{\xi\in\mathbb{R}^n;\ P^0(-i\xi)\neq 0\}$の$\vartheta$を含む connected component を表わし、

$$\Gamma_0=\{\xi'\in\mathbb{R}^{n-1};\ (\xi',0)\in\Gamma\},$$

$$\dot{\Gamma}=\{\xi'\in\mathbb{R}^{n-1};\ (\xi',\xi_n)\in\Gamma \text{ for some } \xi_n\in\mathbb{R}\}$$

とおく。 $P(\xi)$のξ^0での localization $P_{\xi^0}(\eta)$及びその重複度m_{ξ^0}を

$$\nu^m P(\nu^{-1}\xi^0+\eta)=\nu^{m_{\xi^0}}(P_{\xi^0}(\eta)+o(1)) \quad \text{as } \nu\downarrow 0,\ P_{\xi^0}(\eta)\neq 0,$$

によって定義する([1]参照)。 そのとき、$\Gamma\subset\Gamma_{\xi^0}\equiv\Gamma(P_{\xi^0})$が成立つ。 $P(\xi)$を

$$P(\xi)=\textstyle\sum_{j=0}^{m'}P_j(\xi')\xi_n^j,\quad P_{m'}(\xi')\neq 0,$$

と書けば、$P_{m'}(\xi')=P_{(0,1)}(\tilde{\xi})$より

$$P_{m'}(\xi')\neq 0 \quad \text{for } \xi'\in\mathbb{R}^{n-1}-i\gamma_0\vartheta'-i\dot{\Gamma}_{(0,1)}$$

が得られる。 $\Gamma_0 \subset \dot{\Gamma} \subset \dot{\Gamma}_{(0,1)}$ より、$\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} - i\gamma_0\vartheta' - i\Gamma_0$ のとき $P(\xi',\lambda)=0$ の λ に関する根を $\lambda_1^+(\xi'), \cdots, \lambda_l^+(\xi'), \lambda_1^-(\xi'), \cdots,$ $\lambda_{m-l}^-(\xi')$ ($\mathrm{Im}\ \lambda_k^{\pm}(\xi') \gtrless 0$) と表わせる。 混合問題 $\{P, B_j;$ $j=1,\cdots,l\}$ の基本解とは

$$
(1)\quad \begin{cases} P(D_x)G(x,y_n) = \delta(x')\delta(x_n+y_n), & (x,y_n)\in X, \\ B_j(D_x)G(x,y_n)|_{x_n=0} = 0, & j=1,\cdots,l,\ x'\in\mathbb{R}^{n-1},\ y_n<0, \\ \mathrm{supp}_x\, G(x,y_n) \subset (0,\cdots,0,-y_n)+K, \end{cases}
$$

をみたす $x_n=0$ の近傍で $x_n=0$ までこめて x_n に関して滑らかな超函数 $G(x,y_n)$ のことである。 ここで、K は $K\setminus\{0\}\subset\{x\in\mathbb{R}^n; x_1>0\}$ なる原点を頂点とするある閉凸錐を表わす。x_1 を時間変数、$(x_2,\cdots,x_n)$ を空間変数と考えている。

$$P_+(\xi',\lambda) = \Pi_{j=1}^{l}(\lambda-\lambda_j^+(\xi')),\quad \xi'\in\mathbb{R}^{n-1}-i\gamma_0\vartheta'-i\Gamma_0,$$

とおき、Lopatinski 行列式 $R(\xi')$ を

$$R(\xi') = \det L(\xi'),\quad \xi'\in\mathbb{R}^{n-1}-i\gamma_0\vartheta'-i\Gamma_0,$$

$$L(\xi') = \left(\frac{1}{2\pi i}\oint B_j(\xi',\lambda)\lambda^{k-1}P_+(\xi',\lambda)^{-1}d\lambda\right)_{j,k=1,\cdots,l}$$

によって定義する。 次の仮定をおく:

(A) $\{P, B_j\}$ は Ξ-well posed である。 すなわち、

$$R^0(-i\vartheta')\neq 0,\ R(\xi'+is\vartheta')\neq 0 \text{ when } \xi'\in\mathbb{R}^{n-1},\ \mathrm{Im}\, s<-\gamma_1.$$

ここで、$R^0(\xi')$ は $R(\xi')$ の主部を表わし、$\gamma_1>\gamma_0$ とえらんでおく(Sakamoto [5])。

条件(A)より、(1)の解 $G(x,y_n)$ が一意に存在することが従

う(Shibata [6])。

$$G(x, y_n) = E(x', x_n + y_n) - F(x, y_n)$$

と表わす。 ここで、$E(x)$は Cauchy 問題の基本解を表わす。そのとき、$F(\tilde{z})$ $(\tilde{z} = (z_1, \cdots, z_n, z_{n+1}))$は

$$F(\tilde{z}) = (2\pi)^{-(n+1)} \int_{\mathbb{R}^{n+1} - i\gamma\tilde{\vartheta}} i^{-1} \sum_{j,k=1}^{l} e^{i\tilde{z}\cdot\xi} \times \frac{R_{jk}(\xi')\, B_k(\xi', \xi_{n+1})\, \xi_n^{j-1}}{R(\xi')\, P_+(\xi)\, P(\xi', \xi_{n+1})} d\xi, \quad \gamma > \gamma_1$$

と書かれる。 ここで、

$$R_{jk}(\xi) = (k, j)\text{-cofactor of } L(\xi')$$

である。 ここでは $F(\tilde{z})$を X 上の超函数と考えるが、$F(\tilde{z})$を $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の超函数とも考えることができ、$\mathrm{supp}\, F \subset \{\tilde{z} \in \mathbb{R}^{n+1};\ z_n \geq 0\}$であることに注意しておく。

問題は仮定(A)の下で$WF(G)$を評価することであるが、[1]によって$WF(E)$の評価は与えられているので、$WF(F)$を評価すればよい。 境界上に与えられたδ-函数に対する混合問題の解(Poisson 核)の積分表示は$F(\tilde{z})$のそれより少し簡単になり、その wave front set が評価されれば$WF(F)$も評価される(または同じ議論が適用できる)。 Poisson 核の wave front set に対する結果は比較的簡単に記述されるが、$WF(F)$に対する結果は入射波が境界で反射される状況を非常に良く説明してくれる。 故に、ここでは$WF(F)$に対して結果を述べる。

3. 結果

$P(\xi)$を

$$P(\xi)=\Pi_{j=1}^{\ell} p_j(\xi)^{\nu_j},\qquad p_j\,:\,\text{既約},$$

と表わし、$\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}-i\gamma_0\vartheta'-i\Gamma_0$ のとき、$\Pi_{j=\ell'+1}^{\ell} p_j(\xi',\lambda)=0$ が虚部正の根をもたないと仮定する。 $\xi^{0\prime}\in\mathbb{R}^{n-1}$ に対して、

$$\dot{\Gamma}_{\xi^{0\prime}}=\cap_{j=1}^{\ell'}\{\cap_{\xi_n^0\in\mathbb{R}}\dot{\Gamma}((p_j)_{\xi^0})\cap\dot{\Gamma}(((p_j)_{(0,1)})_{(\xi^{0\prime},0)})\}$$

とおく。 そのとき、次の2つの補題が成立つ。

補題1 $^{\forall}$compact set K in $\mathbb{R}^{n-1}-i\gamma_0\vartheta'-i\dot{\Gamma}_{\xi^{0\prime}}$, $^{\exists}\nu_K\ (>0)$ s.t.

(i) $R(\nu^{-1}\xi^{0\prime}+\eta')$: well-defined for $\eta'\in K$ and $0<\nu\le\nu_K$,

(ii) $\nu^{h_{\xi^{0\prime}}}R(\nu^{-1}\xi^{0\prime}+\eta')=\sum_{j=0}^{\infty}\nu^{j/L}R_{\xi^{0\prime},j}(\eta')$,

$R_{\xi^{0\prime},0}(\eta')\ (=R_{\xi^{0\prime}}(\eta'))\not\equiv 0$,

(収束は $(\eta',\nu)\in K\times\{0\le\nu\le\nu_K\}$ で一様)

ここで、$h_{\xi^{0\prime}}\in\mathbb{Q}$, $L\in\mathbb{N}$ である。 さらに、$R_{\xi^{0\prime},j}(\eta')$ は $\mathbb{R}^{n-1}-i\gamma_0\vartheta'-i\dot{\Gamma}_{\xi^{0\prime}}$ で正則である。

補題2 $^{\forall}$compact set K in $\mathbb{R}^{n-1}-i\dot{\Gamma}_{\xi^{0\prime}}$, $^{\exists}\nu_K, r_K\ (>0)$ s.t.

(i) $R(\nu^{-1}r\xi^{0\prime}+r\eta')$: well-defined when $r_K\eta'\in\mathbb{R}^{n-1}-i\gamma_0\vartheta'-i\dot{\Gamma}_{\xi^{0\prime}}$, $\alpha\eta'\in K$ for some $\alpha\in\mathbb{C}$ $(|\alpha|=1)$, $0<\nu\le\nu_K$ and $r\ge r_K$,

(ii) $(\nu r^{-1})^{h_{\xi^{0\prime}}}R(\nu^{-1}r\xi^{0\prime}+r\eta')=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}r^{h_j(\xi^{0\prime})-l}\nu^{j/L}R^{l}_{\xi^{0\prime},j}(\eta')$,

$R^{0}_{\xi^{0\prime},j}(\eta')\not\equiv 0$ if $R_{\xi^{0\prime},j}(\eta')\not\equiv 0$,

(収束は $\{(\eta',\nu,r);\ r_K\eta'\in\mathbb{R}^{n-1}-i\gamma_0\vartheta'-i\dot{\Gamma}_{\xi^{0\prime}}$, $\alpha\eta'\in K$ for some $\alpha\in\mathbb{C}$ $(|\alpha|=1)$, $0\le\nu\le\nu_K$ and $r\ge r_K\}$ で一様)

ここで、$h_j(\xi^{0\prime})\in\mathbb{Q}$ である。 さらに、$R^{l}_{\xi^{0\prime},j}(\eta')$ は $\mathbb{R}^{n-1}-i\dot{\Gamma}_{\xi^{0\prime}}$

で正則である。

<u>注意</u>　$(R_{\xi'^0})^0(\eta') = R^0_{\xi'^0,0}(\eta')$.

これら2つの補題は、$R_{jk}(\xi')$, $P_+(\xi',\lambda)$に対しても成立つ。

$(R_{\xi'^0})^0(-i\vartheta')\neq 0$であるので、$\Gamma(R_{\xi'^0})$によって$\{\eta'\in\dot{\Gamma}_{\xi'^0};\ (R_{\xi'^0})^0(-i\eta')\neq 0\}$の$\vartheta'$を含むconnected componentを表わし、$\Gamma(P_{+\xi'^0})$によって$\{\eta\in\dot{\Gamma}_{\xi'^0}\times\mathbb{R};\ P^0_{+\xi'^0}(-i\eta)\neq 0\}$の$\vartheta$を含むconnected componentを表わす。

<u>補題3.</u>　$\Gamma(R_{\xi'^0})\,(\subset\mathbb{R}^{n-1})$は開凸錐であり、

$R_{\xi'^0}(\xi')\neq 0$　for　$\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}-i\gamma_1\vartheta'-i\Gamma(R_{\xi'^0})$,

$(R_{\xi'^0})^0(\xi')\neq 0$　for　$\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}-i\Gamma(R_{\xi'^0})$.

<u>補題4.</u>　$\Gamma(P_{+\xi'^0})\,(\subset\mathbb{R}^{n})$は開凸錐であり、

$P_{+\xi'^0}(\xi)\neq 0$　for　$\xi\in\mathbb{R}^{n}-i\gamma_1\vartheta-i\Gamma(P_{+\xi'^0})$,

$P^0_{+\xi'^0}(\xi)\neq 0$　for　$\xi\in\mathbb{R}^{n}-i\Gamma(P_{+\xi'^0})$,

•　$\Gamma(P_{+\xi'^0})\supset\Gamma_{\xi'^0}$.

Lopatinski行列式$R(\xi')$の主部$R^0(\xi')$のlocalizationが定義できることをしめすために、

$t_j\equiv t_j(\xi'^0)=h_{\xi'^0}+h_j(\xi'^0)$,

$t\equiv t(\xi'^0)=\max t_j(\xi'^0)$,　$\omega\equiv\omega(\xi'^0)=\min\{j;\ t(\xi'^0)=t_j(\xi'^0)\}$,

とおく。そのとき、$t(\xi'^0)=t_0(0)$であり、補題2より次の補題を得る。

補題5　$R^0(\xi')$は定義でき、$(R^0)_{\xi^{0\prime}}(\eta')$を定義できる。さらに、

$$(R^0)_{\xi^{0\prime}}(\eta') = R^0_{\xi^{0\prime},\,\omega(\xi^{0\prime})}(\eta').$$

$(R^0)_{\xi^{0\prime}}(-i\vartheta') \neq 0$であるので、$\Gamma((R^0)_{\xi^{0\prime}})$によって$\{\eta' \in \dot{\Gamma}_{\xi^{0\prime}};\ (R^0)_{\xi^{0\prime}}(-i\eta') \neq 0\}$の$\vartheta'$を含む connected component を表わす。

補題6　$\Gamma((R^0)_{\xi^{0\prime}})\ (\subset \mathbb{R}^{n-1})$は開凸錐であり、

$$(R^0)_{\xi^{0\prime}}(\xi') \neq 0 \quad \text{for } \xi' \in R^{n-1} - i\Gamma((R^0)_{\xi^{0\prime}}).$$

今、$\xi^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$に対して、

$$\Gamma_{\xi^0} = \{\tilde{\eta} \in \mathbb{R}^{n+1};\ (\eta', \eta_{n+1}) \in \Gamma(P_{(\xi^{0\prime},\,\xi^0_{n+1})})\}$$
$$\cap\,(\Gamma(P_{+\xi^0}) \times \mathbb{R}) \cap (\Gamma(R_{\xi^{0\prime}}) \times \mathbb{R}^2),$$
$$\Gamma^0_{\xi^0} = \{\tilde{\eta} \in \mathbb{R}^{n+1};\ (\eta', \eta_{n+1}) \in \Gamma(P_{(\xi^{0\prime},\,\xi^0_{n+1})})\}$$
$$\cap\,(\Gamma(P_{+\xi^0}) \times \mathbb{R}) \cap (\Gamma((R^0)_{\xi^{0\prime}}) \times \mathbb{R}^2),$$

とおく。

定理1.　$\xi^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$に対して、

$$t^{N/L}\{t^{p_0} e^{-it\tilde{z}\cdot\xi^0} F(\tilde{z}) - \textstyle\sum_{j=0}^{N} F_{\xi^0,j}(\tilde{z})\, t^{-j/L}\}$$
$$\longrightarrow 0 \quad \text{as } t \to \infty, \text{ in } \mathcal{D}'(X), \quad N = 0, 1, 2, \cdots.$$

ここで、$p_0 \in \mathbb{Q}$, $L \in \mathbb{N}$である。さらに、

$$\cup_{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}} \cup_{j=0}^{\infty} \operatorname{supp} F_{\xi,j}(\tilde{z}) \times \{\xi\} \subset WF(F(\tilde{z}))$$
$$\subset WF_A(F(\tilde{z})) \subset \cup_{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}} K^0_{\xi} \times \{\xi\},$$
$$\overline{\mathrm{ch}}\,[\cup_{j=0}^{\infty} \operatorname{supp} F_{\xi^0,j}(\tilde{z})] \subset K_{\xi^0},$$

$$K_{\xi^0} \subset K^{0}_{\xi^0},$$

ここで、

$$K_{\xi^0} = \{ z \in X \,;\, z\cdot\eta \geq 0 \ \text{for} \ ^{\forall}\eta \in \Gamma_{\xi^0} \},$$

$$K^{0}_{\xi^0} = \{ z \in X \,;\, z\cdot\eta \geq 0 \ \text{for} \ ^{\forall}\eta \in \Gamma^{0}_{\xi^0} \}.$$

定理2. Mを compact set in $\Gamma((R^0)_{\xi^{0\prime}})$とする。そのとき、$^{\exists}U$: nbd. of $\xi^{0\prime}$ s.t.

$$M \subset \Gamma((R^0)_{\xi'}) \quad \text{for } \xi' \in U.$$

系。 $\bigcup_{\xi \in R^{n+1}\setminus\{0\}} K^{0}_{\xi} \times \{\xi\}$は、$T^{*}X\setminus 0$で閉じている。

ここで述べた補題・定理等の証明は、[11]で与えられている。

4. 例

例1 $n=4$

$$\begin{cases} P(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2 + a\xi_3)(\xi_1^2 - \xi_4^2), & a>0, \\ B_1(\xi) = 1, \quad B_2(\xi) = (-\xi_1 - i\xi_3)\xi_4 - \xi_4^2, \end{cases}$$

そのとき、$R(\xi) = i\xi_3 + \sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + a\xi_3}$であり、$\{P, B_1, B_2\}$は条件(A)を満たす。 この例では、$\bigcup_{\xi \in R^5\setminus\{0\}} K_{\xi} \times \{\xi\}$は、$T^{*}X\setminus 0$の閉部分集合ではなく、

$$\bigcup_{\xi \in R^5\setminus\{0\}} \bigcup_{j=0}^{\infty} \operatorname{supp} F_{\xi,j} \times \{\xi\} = \bigcup_{\xi \in R^5\setminus\{0\}} K_{\xi} \times \{\xi\}$$

$$\subsetneq WF(F) \subset WF_A(F) \subset \bigcup_{\xi \in R^5\setminus\{0\}} K^{0}_{\xi} \times \{\xi\},$$

$$\overline{ch}[WF(F)|_{\xi^0}] = \overline{ch}[WF_A(F)|_{\xi^0}] = K^{0}_{\xi^0} \quad \text{for } \xi^0 \neq 0,$$

がしめされる。

例2. $n = 3$

$$\begin{cases} P(\xi) = ((\xi_1 - \xi_2)^2 - \xi_3^2 + a)((2\xi_1 - \xi_2)^2 - \xi_3^2), \\ B_1(\xi) = 1, \quad B_2(\xi) = \xi_3 \end{cases}$$

そのとき、$R(\xi') = -1$ で、$\{P, B_1, B_2\}$ は条件(A)をみたす。$(\xi_1 - \xi_2)^2 - \xi_3^2 + a$ は、$a \neq 0$ のとき既約であることに注意しておく。

$$WF(F)|_{(1,1,-1,1)} = \{\hat{z} \in X \,;\, \hat{z} = \alpha(2,-1,0,-1) + \beta(2,-1,1,0) + \gamma(1,-1,0,0),\ \alpha, \beta > 0 \text{ and } \gamma \geq 0\}, \quad (a \neq 0).$$

$$WF(F)|_{(1,1,-1,1)} = \{\hat{z} \in X \,;\, \hat{z} = \alpha(2,-1,0,-1) + \beta(2,-1,1,0),\ \alpha, \beta > 0\}, \quad (a = 0)$$

である。上は、$a \neq 0$ のとき側面波と呼ぶべき波に対応する特異性があらわれることをしめす。Cauchy 問題にくらべて低階の影響が非常に大きいことを、この例はしめしている。

References

[1] Atiyah, M. F., Bott, R. and Gårding, L., Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients. I, Acta Math,. 124 (1970), 109-189.

[2] Duff, G. F. D., On wave fronts, and boundary waves, Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), 189-225.

[3] Garnir, H. G., Solution élémentaire des problèms aux limites hyperboliques, to appear.

[4] Matsumura, M., Localization theorem in hyperbolic mixed problems, Proc. Japan Acad., 47 (1971), 115-119.

[5] Sakamoto, R., $\mathcal{E}$ -well posedness for hyperbolic mixed problems with constant coefficients, J. Math. Kyoto Univ., 14 (1974), 93-118.

[6] Shibata, Y., A characterization of the hyperbolic mixed problems in a quarter space for differential operators with constant coefficients, to appear.

[7] Tsuji, M., Fundamental solutions of hyperbolic mixed problems with constant coefficients, Proc. Japan Acad., 51 (1975), 369-373.

[8] Wakabayashi, S., Singularities of the Riemann function of hyperbolic mixed problems in a quarter-space, Proc. Japan Acad., 50 (1974), 821 -825.

[9] _______________, Singularities of the Riemann function of hyperbolic mixed problems in a quarter-space, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 11 (1976), 417-440.

[10] _______________, Analytic wave front sets of the Riemann functions of hyperbolic mixed problems in a quarter-space, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 11 (1976), 785-807.

[11] _______________, Propagation of singularities of the fundamental solutions of hyperbolic mixed problems, to appear.